MA1 – přednáška 2.11.2020 („písemná")

I. Příklady dalších „neurčitých výrazů" při určování limit:

další neurčité výrazy se mohou objevit při výpočtu limit funkce $f(x)^{g(x)}$, která je definována takto:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \quad \text{pro } x \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g,\ f(x)>0$$

Je-li $a \in R^*$, a funkce $f(x)^{g(x)}$ je definována v $P(a)$ (nebo v $P_{(-)}^{+}(a)$), pak (budeme uvažovat limity oboustranné pro $a \in R$, pro $x \to a_{(-)}^{+}$ platí analogicky)

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$$

a dle věty o limitě složené funkce „stačí" určit limitu $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$. A právě zde se mohou objevit neurčité výrazy (pro limitu součinu), které mohou být (a v literatuře i bývají) dalšími neurčitými výrazy (pro limitu funkce $f(x)^{g(x)}$) – ale není třeba si tyto neurčité výrazy pamatovat:

1) „∞^0" – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ → pak „$0 \cdot \infty$" (pro limitu součinu $g(x) \cdot \ln f(x)$);

2) „0^0" – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0(+)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ → pak „$0 \cdot (-\infty)$" (pro limitu součinu $g(x) \cdot \ln f(x)$);

3) „1^∞" – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ → pak „$\infty \cdot 0$" (pro limitu součinu $g(x) \cdot \ln f(x)$)

Příklady „těžkých limit":

1) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}} \underset{def.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$ $\qquad \underline{(= „\infty^0")}$

ale limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\ln x = „0\cdot\infty" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

ještě „neumíme" určit, ale tušíme, že asi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(třeba z grafu), pak by $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0} e^{t} = e^{0} = 1}$

2) $\underline{\lim\limits_{x\to 0+} x^{x} = „0^{0}"} \underset{def.}{=} \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = ?$

Zde asi „netušíme", jak vyjde limita $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = „0\cdot\infty"$

(budeme umět určit tuto limitu pomocí derivací)

3) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = „1^{\infty}"} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \underline{\lim\limits_{y\to 1} e^{y} = e}$

Ale zde už „umíme" limitu určit:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = „\infty\cdot 0" \underset{„\text{na podíl}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = „\frac{0}{0}"$$

$$\underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \underset{(T)}{=} 1\ ! \qquad (*)$$

$\left(\frac{1}{x} = y,\ \text{pro } x\to\infty\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\right)$

II. Ještě „poznámky" k limitě funkce:

1. Věta o uspořádání limit (užijeme občas později)

(je napsána v přednášce z 26.10.20 – strana 6)

a) nechť 1) $f(x) \leqq g(x)$ v $P(a)$ $(a \in R^*)$

2) existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$;

pak $\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$

(bereme „ $a < \infty$ pro $a \in R$, $-\infty < a$, $a \in R$)

b) je-li $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ $(a \in R^*)$, pak existuje $P(a)$

tak, že pro $x \in P(a)$ platí $f(x) < g(x)$.

(analogicky i pro jednostranné limity v případě $a \in R$)

A důsledek (taky str. 6, přednáška 26.10.)

je-li $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, pak existuje $P(a)$ takové, že $f(x) > 0$ v $P(a)$.

Speciálně, je-li f spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}f$, $f(a) > 0$, pak existuje $U(a)$ takové, že $f(x) > 0$ v $U(a)$.

(analogicky pro jednostranné limity)

2. Věty o limitě monotónní funkce

Připomeňme si: $f: M \to R$ je na M omezená shora, když existuje $c \in R$ tak, že $f(x) \leqq c$ pro $\forall x \in M$, f je omezená na M zdola, když existuje $d \in R$ tak, že $f(x) \geqq d$ pro $\forall x \in M$; a f je na M omezená, když je na M omezená shora i zdola, tj. $d \leqq f(x) \leqq c$ pro $\forall x \in M$.

A důležitá tvrzení o limitách funkcí monotonních:

<u>Věta:</u> Nechť funkce $f:(a,b)\to R$ je na intervalu (a,b) monotonní a omezená. Pak existují limity $\lim_{x\to b-} f(x)$ i $\lim_{x\to a+} f(x)$, a jsou vlastní.

<u>Speciálně</u>

Mějme funkci $f:(a,+\infty)\to R$, neklesající na $(a,+\infty)$; pak

(i) je-li f na $(a,+\infty)$ omezená shora, existuje vlastní limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in R$.

(ii) není-li f omezená na $(a,+\infty)$, pak je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (tj. existuje, a je nevlastní)

Analogicky pro funkce nerostoucí na $(a,+\infty)$ a omezené (resp. neomezené) zdola:

(i) f je na $(a,+\infty)$ nerostoucí a omezená zdola $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ex. $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in R$;

(ii) je-li f na $(a,+\infty)$ nerostoucí, f není omezená zdola na $(a,+\infty)$, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Podobně (zkuste si promyslet) platí tvrzení o limitě monotónní fce, definované v $(-\infty,a)$, pro $x\to-\infty$.

III. Limita posloupnosti reálných čísel

Posloupností (reálných čísel) rozumíme zobrazení (funkci)

$$a: N \to R, \text{ pro } n \in N \text{ píšeme } a_n \text{ (místo } a(n)),$$

a obvykle posloupnost zapisujeme

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \text{ nebo } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Příklady posloupností:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \text{ dále třeba}$$

$$\{q^n\}_{n=1}^{\infty} = \{q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots\} \text{ (geometrická posloupnost)}$$

$$(q \neq 0)$$

$$\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty} \ (a > 0); \ \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}, \ \left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}, \ \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Důležité a užitečné (i zajímavé) je vyšetřování limit i u posloupností, definice limity $\lim_{n \to \infty} a_n = L \ (\in R, \pm\infty)$ jsou analogické definici limity $\lim_{x \to \infty} f(x)$:

Definice (vlastní limity posloupnosti): $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána; pak $\lim_{n \to \infty} a_n = L \in R$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \in N, n > n_0: \ |a_n - L| < \varepsilon$$

$$(\text{nebo} \quad a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon))$$

Definice (nevlastní limity posloupnosti $\{a_n\}$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), když platí:

$\forall K$ (stačí $K>0$, resp. $K<0$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0, n\in\mathbb{N}$: $a_n > K$
(resp. $a_n < K$)

Příklady: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$,

$\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

(*) Zde $a_n = f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, a zřejmě, pokud existuje $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, pak také $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

Některé další důležité limity:

(i) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \iff |a| < 1$

$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ pro $a > 1$,

$\{a^n\}_1^\infty$ limitu (asi) nemá, je-li $a \leqq -1$

} představte si na „tabák" limit

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ – někdy se takto definuje Eulerovo číslo „e"

(to ale už „umíme" – na začátku přednášky byl příklad $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ – spojme s poznámkou (*) „nahoře")

Pro limity posloupností platí věty o aritmetice limit (díky analogické definici limity posloupnosti a limity funkce (pro $x \to \infty$)), a zřejmě i věty o limitě sevřené posloupnosti a její analogie pro limity nevlastní.

Ukažme další příklady výpočtu limit posloupností:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, neboť $0 \leq \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} \leq \frac{1}{n}$,

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tedy užijeme VOS

$\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$, neboť $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \geq n$,

a $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ (a opět VOS)

(a odtud už užitím i AL: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \, \text{"}= \frac{1}{\infty}\text{"} = 0$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, neboť: $0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2 \cdot\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot(n-1)n} \leq 2\cdot\frac{2}{n}$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$ (a opět VOS)

a třeba i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = 0$, neboť i pro posloupnosti platí:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Ale: posloupnosti $\{(-1)^n\}$, nebo $\{(-2)^n\}$, "asi" limitu nemají – jak ukážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ limitu nemá (bude užitečné i pro neexistence limity funkce)?

Definice: (vybrané posloupnosti z $\{a_n\}$)
Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dále posloupnost „vybraných" indexů $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ($\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$), pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (též podposloupnost).

Pak platí:
Má-li $\{a_n\}$ limitu L ($\in \mathbb{R}, \pm\infty$), pak, je-li $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vybraná, je i $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ (tj. každá vybraná posloupnost z $\{a_n\}_1^{\infty}$ má taktéž limitu L)

A tedy, pro důkaz, že posloupnost limitu nemá, stačí najít dvě vybrané posloupnosti, které mají limity różné:

Příklad: $\{(-1)^n\}$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \quad \text{ale} \\ &\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{posloupnost } \{(-1)^n\}_1^{\infty} \text{ nemá limitu}$$

analogicky, posloupnost $\{(-2)^n\}_1^{\infty}$ nemá limitu, neboť

$$\lim_{k\to\infty} (-2)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 4^k = +\infty ,$$

$$\lim_{k\to\infty} (-2)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-2) \cdot 4^k = -\infty \quad (AL)$$

Limita posloupnosti „je využívaná" i při důkazech neexistence limity funkce. Zatím víme:

je-li $a \in R$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ $(\in R, \pm\infty)$ $\Rightarrow$ existují jednostranné limity v bodě $a\pm$ a platí: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$;

tedy, pokud $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, funkce f nemůže mít limitu v bodě a $(\in R)$.

A to, že funkce $f(x) = \sin x$ nemá limitu pro $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ jsme zatím jen „odhadovali". Jak se toto „dokáže"?

Uveďme velmi užitečnou větu o souvislosti limity funkce a limit posloupnosti:

Věta (Heine):

Funkce $f(x)$ má v bodě $a (\in R^*)$ limitu $L (\in R^*)$, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ $(n \in N)$, platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$

(analogicky lze větu formulovat pro $a \in R$ i pro limity $\lim\limits_{x \to a\pm} f(x)$)

Tedy: pokud „najdeme" aspoň dvě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{\bar{x}_n\}$, pro které je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \bar{x}_n = a$, $x_n \neq a$, $\bar{x}_n \neq a$ $(n \in N)$, a takové, že $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(\bar{x}_n)$, pak funkce f nemá limitu v bodě a.

A nyní už je „snadné" přesně ukázat, že funkce $f(x) = \sin x$ nemá limitu v $+\infty$ (analogicky i v $(-\infty)$):

<u>Příklad:</u> $f(x) = \sin x$:

(i) $x_n = n\pi,\ n \in N$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n\pi) = \infty$ a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

(ii) $\overline{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in N$: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \infty$ a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\overline{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$,

tedy (dle věty Heineovy) funkce $\sin x$ nemá limitu v $+\infty$ (teď už „přesně" víme).

<u>A ještě trošku o velmi důležité limitě mezi limitami posloupností – – o nekonečné řadě:</u>

Je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá nekonečná řada (číselná), a a_n se nazývají členy řady. A co „si máme představit" pod součtem nekonečně mnoha čísel?

Je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, vytvoříme posloupnost $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$, kde $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, posloupnost $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, a součet $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ chápeme jako limitu posloupnosti $\{s_N\}$, pokud tato existuje, tj:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

(Posloupnost $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ ovšem mít limitu „někdy" nemusí.)

A uveďme definici:

<u>Definice:</u> Říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, když existuje konečná limita $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} a_n = s\,(\in R)$; limita $\underline{s}$ se nazývá součtem nekonečné řady a píše se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Jinak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (pro $s = \pm\infty$, nebo když posloupnost $\{S_N\}$ limitu nemá).

<u>Poznámka:</u> I o posloupnostech říkáme, že konvergují, když je $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$, a že divergují, když $\lim_{n\to\infty} a_n = \underset{(-)}{+}\infty$ nebo, když $\{a_n\}_1^{\infty}$ limitu nemá).

<u>Příklady nekonečných řad</u>

1) ze střední školy je (asi) známá <u>řada „geometrická"</u> ($q \in R$): $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}$, a že $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow |q|<1$,
(jinak řada $\sum_0^{\infty} q^n$ diverguje):
je „známý" vzorec pro $S_N = \sum_0^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, je-li $q \neq 1$,
pak „je vidět", že $\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow |q|<1$, pro $|q|<1$ je $\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0$; pro „ostatní" q buď $\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$ ($q \geq 1$) nebo $\{S_N\}_1^{\infty}$ limitu nemá ($q \leq -1$), tj. geometrická řada „osciluje".

2) Uvedeme si ještě „známé" řady:

(i) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo)

(ii) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ je konvergentní řada $\Leftrightarrow p > 1 \ (p \in N)$

(iii) spec. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler 1736)

Toto ještě neumíme, řady se podrobněji probírají až v přednášce Matematika A2 (v letním semestru), ale aspoň:

Poslední „poznámka" (pro „zájemce")

Vyšetřování konvergence řad je dosti „jiné" než výpočet limit posloupností nebo funkcí, jak se nám většinou dařilo dosud. Až na výjimky se neurčí limita částečných součtů výpočtem, ale pomocí tzv. kritérií konvergence řad se většinou daří zjistit aspoň, zda daná řada konverguje, nebo diverguje. A pak můžeme v případě konvergentní řady její součet určit přibližně – aproximovat částečným součtem s požadovanou přesností – to plyne z definice vlastní limity posloupnosti (zde užité na posloupnost částečných součtů řady).

A naznačíme si aspoň ten nejjednodušší případ – jak se „zjistí" konvergence (aspoň jedním způsobem, z toho jsou pak odvozena další užitečná kritéria) u řad, jejichž členy „nemění" znaménko – užije se vlastnost monotónních posloupností a věta o strážnících.

<u>Věta</u>: Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost, tj. $\forall n \in N: a_n \leqq a_{n+1}$.
Pak a) je-li $a_n \leqq c \ \forall n \in N$ (tj. $\{a_n\}$ je posloupnost shora omezená), pak posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in R$;

b) není-li $\{a_n\}$ shora omezená, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Analogicky pro $\{a_n\}$, nerostoucí posloupnost, tj. $\forall n \in N: a_n \geqq a_{n+1}$:
a) je-li $\{a_n\}$ zdola omezená (tj. ex.-li $c \in R: \forall n \in N$ je $a_n \geqq c$), pak $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in R$);
b) není-li $\{a_n\}$ zdola omezená, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(Snad je vidět analogie s limitou monotónní funkce.)
A odtud se dokázal velmi užitečné kritérium konvergence řad (ukážeme si to aspoň jako příklad „práce" s nekonečnými řadami):

<u>Věta</u> (srovnávací kritérium konvergence řad s nezápornými členy):
Nechť 1) $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje;
Pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Naznačení důkazu</u>:
(i) označíme-li $\{s_N\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, pak $\{s_N\}_1^{\infty}$ je neklesající posloupnost (tedy „má" limitu);

(ii) z 1) plyne, že (označme-li $\sigma_N = \sum_1^N b_n$) $s_N \leqq \sigma_N$;

(iii) každá konvergentní posloupnost je omezená shora (i zdola);

Tedy máme:

pro každé N přirozené je $s_N \underset{(ii)}{\leqq} \sigma_N \underset{(iii)}{\leqq} C \Rightarrow$

$\{s_N\}$ je shora omezená neklesající posloupnost, tedy $\{s_N\}$ je konvergentní, a tj. $\sum_1^\infty a_n$ konverguje.

<u>Příklad užití srovnávacího kriteria</u>: pro řadu $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$:

1) $\frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n \in N$

2) $\frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{n(n-1)}$ pro $n = 2, 3, \dots$ (konvergence řady „nezáleží" na jednom členu)

3) $\sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje – příklad „na definici" konvergentní řady:

$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, tedy částečný součet $\sum_2^N \frac{1}{n(n-1)} = \sigma_N$

je $\sigma_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N}$,

a $\lim_{N \to \infty} \sigma_N = 1$, tedy $\sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje, tedy, dle srovnávacího kriteria konverguje i řada $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$

(ale že součet řady je roven $\frac{\pi^2}{6}$ je hodně složité ukázat, neumíme zde).